
Άσκηση 7.11β σελ.309

Μια μη κανονικοποιημένη γραμματοσυνάρτηση για ένα ηλεκτρόνιο σε ένα νανοσωλήνα άνθρακα μήκους L είναι $\sin(2\pi x/L)$. Κανονικοποιήστε αυτήν την κυματοσυνάρτηση.

$$\Psi = N \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \Psi^* \Psi dx = 1 \quad (\text{συνθήκη κανονικοποίησης})$$

Ολοκληρώνω από 0 έως L γιατί αυτά είναι τα όρια του συστήματος μου

$$|N|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = 1$$

Εφαρμογή της ταυτότητας $\sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2}$

$$|N|^2 \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{4\pi x}{L}}{2} dx = 1 \quad (a = \frac{2\pi}{L})$$

$$|N|^2 \left[\int_0^L \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) dx \right] = 1$$

$$|N|^2 \left[\frac{x}{2} \Big|_0^L - \frac{1}{2} \frac{L}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \Big|_0^L \right] = 1$$

$$|N|^2 \left[\frac{L}{2} - 0 \right] = 1 \Rightarrow |N|^2 = \frac{2}{L} \Rightarrow N = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Άρα

$$\Psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Άσκηση 7.12β σελ.309

Για το σύστημα που περιγράφεται στην Άσκηση 7.11β, ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στο διάστημα dx στο $x=L/2$;

$$P\left(\frac{L}{2}\right) = ?$$

$$P(x) = |\Psi|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$P\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi \frac{L}{2}}{L}\right) = \frac{2}{L} \sin^2(\pi) = 0$$

Άσκηση 7.13β σελ.309

Για το σύστημα που περιγράφεται στην Άσκηση 7.11β, ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο μεταξύ των $x=L/4$ και $x=L/2$;

Λύση

$$P\left(\frac{L}{4} < x < \frac{L}{2}\right) = ?$$

$$P = \frac{2}{L} \int_{L/4}^{L/2} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

$$\text{Ταυτότητα } \sin^2 ax = \frac{1 - \cos 2ax}{2} \text{ με } a = \frac{2\pi}{L}$$

$$P = \frac{2}{L} \int_{L/4}^{L/2} \frac{1 - \cos 2ax}{2} dx = \frac{2}{L} \left[\int_{L/4}^{L/2} \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_{L/4}^{L/2} \cos 2ax dx \right]$$

$$= \frac{x}{2} \Big|_{L/4}^{L/2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \sin 2ax \Big|_{L/4}^{L/2} = \frac{L}{4} - \frac{L}{8} - \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \sin 2ax \Big|_{L/4}^{L/2}$$

$$= -\frac{1}{4a} \left(\sin aL - \sin\left(\frac{aL}{2}\right) \right)$$

$$= -\frac{1}{4a} (\sin 2\pi - \sin \pi) = 0$$

0 0

Άρα

$$P = \frac{2}{L} \left(\frac{L}{8} + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

Επιμέλεια
Μαργαρίτα Τσαγκαράκη
Φυσικός, MSc