# Μια σύντομη εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

***Περίπτωση 1***

$x^2 + 2x - 3 = 0$

a = 1, b = 2, c = -3

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

**Δ > 0**

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 =$ -3

***Περίπτωση 2***

$x^2 - 4x + 5 = 0$

a = 1, b = -4, c = 5

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

**Δ < 0**

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

*Δεν έχει λύσεις;*
*Ναι αλλά…*

**Fundamental Theorem of Algebra**

*Any polynomial of degree n has n roots*

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Η εξίσωση δεν έχει λύση στο σύνολο των **πραγματικών αριθμών**

Όμως σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, η δευτεροβάθμια εξίσωση θα πρέπει υποχρεωτικά να έχει **δύο λύσεις** σε ένα ευρύτερο σύνολο, τους **μιγαδικούς αριθμούς**

**Ουσιαστικό** [ επεξεργασία ]

**μιγάς** *αρσενικό ή θηλυκό* (και *θηλυκό*: μιγάδα)

1. (για ανθρώπους, ζώα, φυτά κ.λπ.) που οι γονείς του/της προέρχονται από διαφορετικές μεταξύ τους φυλές
   - Εναλλακτικές μορφές μιγάδας
   - ≈ *συνώνυμα:* πολυφυλετικός

**Ariana Miyamoto**
(Japanese – African American)
Miss Universe Japan 2015

Ποιες είναι οι δύο «διαφορετικές φυλές» στους μιγαδικούς αριθμούς;

**Οι πραγματικοί αριθμοί (Real)**
π.χ. 1, 1.5,√5, π, e

+

**Οι φανταστικοί αριθμοί (Imaginary)**
π.χ. 1i, 3.44i, 8i, √2i

***Τί είναι αυτό το i;***

Το $i$ ονομάζεται **φανταστική μονάδα**,
για την οποία ισχύει πως $i^2 = -1$

πίσω στην εξίσωσή μας… $x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x_1 = 2 + i$

$x_2 = 2 - i$

Δηλαδή προκύπτουν **δύο λύσεις** στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, (όπως προβλέπεται από το θεμελιώδες θεώρημα)

**Γενική μορφή ενός μιγαδικού (complex) αριθμού z**

$$z = x + yi$$

Πραγματικό μέρος
Real part (Re)

Φανταστικό μέρος
Imaginary part (Im)

- Για x = 0, ο z γίνεται φανταστικός αριθμός
- Για y = 0, ο z γίνεται πραγματικός αριθμός

Ο **συζυγής** του μιγαδικού $z = x + yi$ θα είναι ο $z^* = x - yi$

Για να τον υπολογίζω βάζω στην θέση του i το –i !

**Υπολογισμός του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού |z|**

$$z z^* = |z|^2$$

Απλά, πολλαπλασιάζω τον αριθμό με το συζυγή του για να βρω το μέτρο στο τετράγωνο

$$|z|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

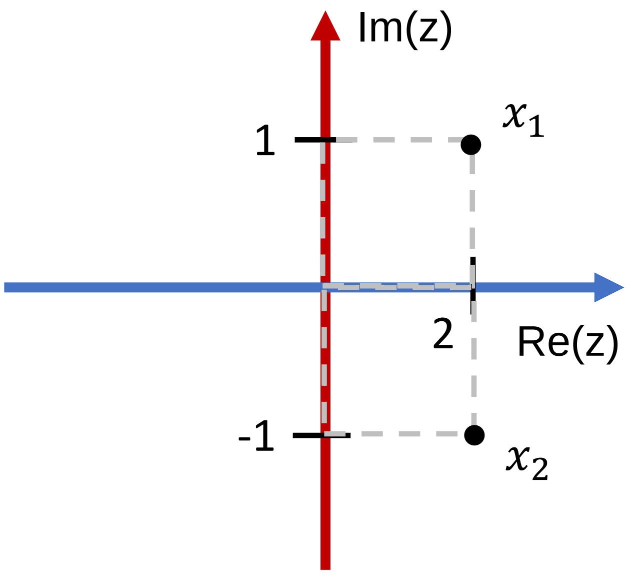
**Παράδειγμα**

Consider the complex number $z = 8 - 3i$. Its square modulus is

$$|z|^2 = z^*z = (8 - 3i)^*(8 - 3i) = (8 + 3i)(8 - 3i) = 64 + 9 = 73$$

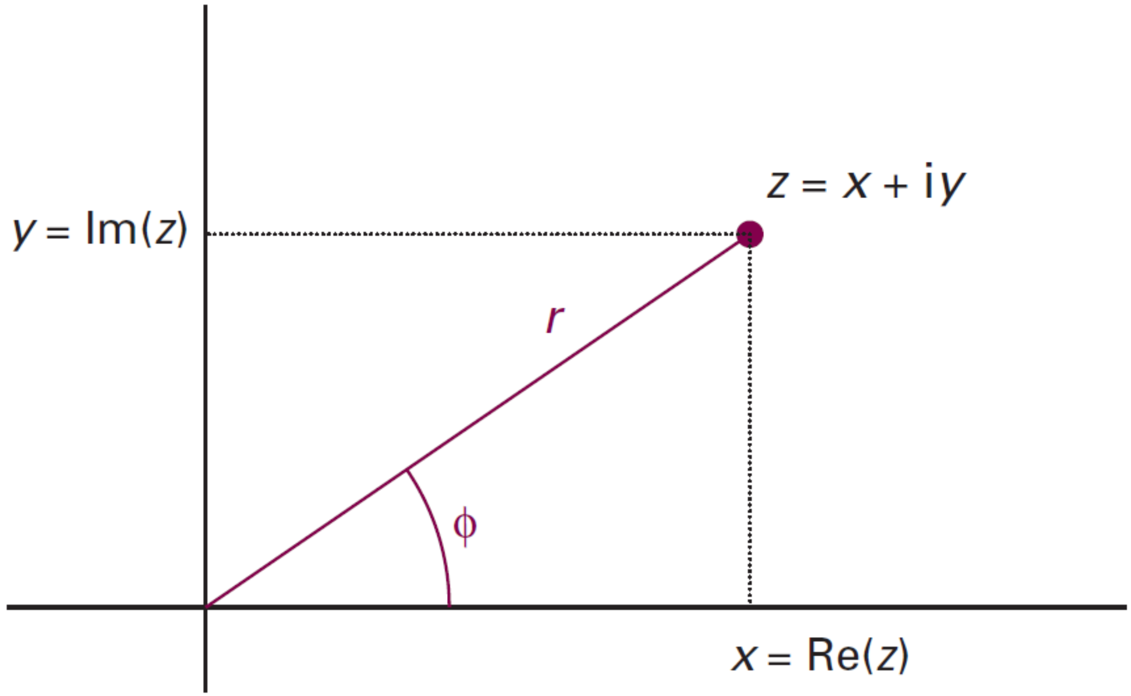
The modulus is therefore $|z| = 73^{1/2}$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο, όπως ορίζεται από τον πραγματικό και το φανταστικό άξονα




**Λύσεις της εξίσωσης**

$$x_1 = 2 + i$$
$$x_2 = 2 - i$$




Για τυχαίο μιγαδικό αριθμό z, μπορούμε να γράψουμε

$$x = r\cos\phi \text{ and } y = r\sin\phi$$

**Πολική μορφή μιγαδικού**

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z| \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}$

Αποδεικνύεται όμως πως

**Σχέση Euler**

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$z = re^{i\phi}$$

Ένα κύμα το οποίο το γράφαμε στη μορφή $y = A\cos(kx)$ (μόνο το πραγματικό μέρος δηλαδή), θα το εκφράζουμε πλέον ως $y = Ae^{ikx}$ (μιγαδική μορφή)

## *Πράξεις μιγαδικών αριθμών*

1. Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$
2. Subtraction: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$
3. Multiplication: $z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1x_2)$$
4. Division: We interpret $z_1/z_2$ as $z_1z_2^{-1}$ and use eqn $z\,z^\star = |z|^2$ for the inverse:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} = \frac{z_1z_2^\star}{|z_2|^2}$$

## *Στην πολική μορφή…*

$z_1z_2 = (r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1})(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}) = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}$ (πολλαπλασιασμός)

$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}$ (ύψωση σε δύναμη n)

Πιθανότητα ανά μονάδα διαστήματος να βρω το σωματίδιο

Και για να γίνει η σύνδεση με τις κυματοσυναρτήσεις…

αν $\psi = Ae^{ikx}$

$$|\psi|^2 = (A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})^\star(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = (A^\star\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = |A|^2$$